Deeltentamen I, Lineaire Algebra
11 november 2003, 9-12 uur

1. Gegeven zijn de punten $A = (-1, 2, 3),\ B = (3, 1, 1),\ C = (1, -2, 2)$.

   (a) Laat zien dat A, B, C niet op één lijn liggen en bepaal een vergelijking van het vlak door A, B, C.

   (b) Zij l de rechte lijn door A en B. Bepaal de coördinaten van het punt D op de lijn l, waarvan de afstand tot het punt $(0, 0, -1)$ minimaal is.

   (c) Bewijs dat van de driehoek ΔABC twee zijden dezelfde lengte hebben, en dat de hoek tussen die zijden kleiner dan $\pi/2$ is. Bereken de oppervlakte van ΔABC.

Uitwerking

(a) De verschilvectoren $A - B = (-4, 1, 2)$ en $A - C = (-2, 4, 1)$ zijn onafhankelijk en dus liggen A, B, C niet op een lijn.

De vergelijking van het vlak krijgen we door de normaal van het vlak te bepalen. Bijvoorbeeld door het uitproduct van $A - B$ en $A - C$ te nemen. We vinden $(-4, 1, 2) \times (-2, 4, 1) = (-7, 0, -14)$. Een normaalvector is dus $(1, 0, 2)$ en het vlak $x + 2z = d$ waarin we d kunnen bepalen door een punt in te vullen. We vinden $d = 5$.

(b) Een parametervoorstelling van l is

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Het punt $D \in l$ dat zo dicht mogelijk bij $(0, 0, 1)$ ligt, heeft de eigenschap dat $D - (0, 0, -1)$ loodrecht op de richting van l staat. Dus

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

loodrecht op $(-4, 1, 2)$. Nemen we het inproduct, dan vinden we $(-4, 1, 2) \cdot (3, 1, 2) + \lambda(-4, 1, 2) \cdot (-4, 1, 2) = 0$. Na uitwerking: $-7 + 21\lambda = 0$. Dus $\lambda = 1/3$ en het punt wordt

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/3 \\ 4/3 \\ 5/3 \end{pmatrix}$$

(c) Merk op dat $|A-B|^2 = (-4)^2+1^2+2^2 = 21$ en $|A-C|^2 = (-2)^2+4^2+1^2 = 21$ Dus hebben de zijden AB, AC dezelfde lengte. De oppervlakte van de driehoek is de helft van het oppervlak opgespannen door de vectoren $A-B$ en $A-C$. M.a.w de helft van de lengte van het uitproduct $(A-B)\times(A-C)$. Als uitproduct hadden we $(-7,0,-14)$, waarvan de lengte $\sqrt{7^2+14^2} = 7\sqrt{1^2+2^2} = 7\sqrt{5}$. Het gevraagde oppervlak is dus $7\sqrt{5}/2$.

Het inproduct van $A-B$ en $A-C$ is 14. Dat is positief en de hoek is dus kleiner dan $\pi/2$. (In de opgave stond per ongeluk groter dan $\pi/2$, dit onderdeel is niet meegerekend bij de beoordeling).

2. Zij V het opspansel van de volgende kolomvectoren,

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(a) Bepaal een basis van V.

(b) Bepaal alle lineaire combinaties van de 5 bovengenoemde vectoren die de nulvector opleveren (lineaire relaties).

(c) Voor welke waarde(n) van α is de kolomvector $(-4,0,1,\alpha)^t$ bevat in V?

Uitwerking

(a) Een basis van V vinden we door de rang van de matrix te bepalen opgespannen door de 5 vectoren. We doen dit door rijen vegen.

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Delen we de eerste rij door twee en vegen vervolgens met het element op plaats 1,1

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Veeg nu met het element op plaats 2,2

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 8/3 & 4/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 4/3 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

We zien dat de laatste twee rijen afhankelijk zijn na nog 1 keer vegen

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 8/3 & 4/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Er zijn drie pivotelementen, dus is de rang 3.

(b) Om alle relaties tussen de vectoren te bepalen moeten we alle $x_1, x_2, \ldots, x_5$ bepalen zó dat

$$x_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dit komt neer op oplossing van het stelsel

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 2 & 4 & 2 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Het vegen gaat op precies dezelfde manier en we vinden

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8/3 & 4/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Oplossing van dit gereduceerde stelsel gaat door x_4, x_5 willekeurig te kiezen en vervolgens x_1, x_2, x_3 te bepalen. We vinden,

$$x_3 = -x_4/2 - x_5/4, \quad x_2 = -x_4/2 - x_5/4 \quad x_1 = x_4/2 - x_5/4.$$

(c) We moeten nu kijken voor welke α het stelsel

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 2 & 4 & 2 & 2 & -4 \\ -1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 1 & \alpha \end{array}\right)$$

oplosbaar is. Dezelfde veegprocedure geeft nu

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 8/3 & 4/3 & 2/3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha - 2 \end{array}\right)$$

Uit de laatste vergelijking zien we dat het stelsel strijdig is als $\alpha - 2 \neq 0$ en een oplossing heeft als $\alpha - 2 = 0$.

3. Zij V de deelruimte van $\mathbb{R}^3$ opgespannen door de vector $(1,2,2)^t$. Zij $P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de afbeelding die aan een vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ de loodrechte projectie van $\mathbf{x}$ op V toekent.

   (a) Bepaal het beeld van een willekeurige vector $(x_1, x_2, x_3)^t$ en leg uit waarom P een lineaire afbeelding is. Bepaal tevens de matrix van P.

   (b) Bepaal kern en het beeld van P.

   (c) Bewijs dat voor elk positief geheel getal n geldt: $P^n = P$.

Uitwerking

(a) De loodrechte projectie van een vector $\mathbf{x}$ op een lijn door de eenheidsvector $\mathbf{e}$ wordt gegeven door $(\mathbf{x}\cdot\mathbf{e})\mathbf{e}$. Passen we dit toe op de vector $\mathbf{e} = \frac{1}{3}(1,2,2)^t$ dan vinden we $\mathbf{x}\cdot\mathbf{e} = (\mathbf{x}\cdot(1/3, 2/3, 2/3)) = (x_1 + 2x_2 + 2x_3)/3$ en dus:

$$P(\mathbf{x}) = \frac{1}{3}(x_1 + 2x_2 + 2x_3)\begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$$

hetgeen gelijk is aan

$$\frac{1}{9}(x_1 + 2x_2 + 2x_3)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 + 2x_3 \\ 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 \\ 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 \end{pmatrix}.$$

Hieruit lezen we af dat

$$P(\mathbf{x}) = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

De afbeelding is lineair omdat hij wordt gegeven door een matrixvermenigvuldiging.

(b) De kern van P wordt gegeven door alle vectoren die naar de nulvector worden afgebeeld. Dat zijn dus de vectoren die loodrecht staan op $(1,2,2)^t$. Met andere woorden het vlak $x_1+2x_2+2x_3=0$. De vectoren $\lambda(1,2,2)^t$ worden allen naar zichzelf afgebeeld, en verder worden alle andere vectoren ook op V afgebeeld. Het beeld is dus V.

(c) Voor een projectie geldt dat twee keer projecteren hetzelfde oplevert als 1 maal projecteren. Dus $P^2 = P$. Hieruit volgt ook dat $P^3 = P \cdot P^2 = PP = P^2 = P$, etc.

4. Zij l en m een tweetal rechte lijnen in $\mathbb{R}^3$ met parametervoorstellingen $\mathbf{p}+\lambda\mathbf{a}$ en $\mathbf{q}+\mu\mathbf{b}$, waarin $\mathbf{a},\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$.

(a) Stel dat l en m elkaar snijden. Bewijs dat de determinant

$$\Delta(\mathbf{p}-\mathbf{q},\mathbf{a},\mathbf{b})$$

nul is.

(b) Stel nu dat $\Delta(\mathbf{p}-\mathbf{q},\mathbf{a},\mathbf{b})=0$. Volgt hieruit dat de lijnen elkaar snijden? Zo ja, laat dit zien, zo nee, geef een voorbeeld waarbij de lijnen elkaar niet snijden.

(c) (bonus) Stel dat l en m elkaar snijden en dat $\mathbf{a}\times\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$. Laat zien dat het snijpunt gegeven wordt door de waarde

$$\lambda = \frac{((\mathbf{q}-\mathbf{p})\times\mathbf{b},\mathbf{a}\times\mathbf{b})}{|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|^2}$$

in de parametervoorstelling $\mathbf{p}+\lambda\mathbf{a}$.

Uitwerking

(a) Het feit dat l en m elkaar snijden betekent dat er λ,μ zijn zó dat $\mathbf{p}+\lambda\mathbf{a} = \mathbf{q}+\mu\mathbf{b}$. Brengen we alles naar links: $\mathbf{p}-\mathbf{q}+\lambda\mathbf{a}-\mu\mathbf{b}$ dan zien we dat er een niet-triviale relatie tussen $\mathbf{p}-\mathbf{q},\mathbf{a},\mathbf{b}$ bestaat. Deze vectoren zijn dus afhankelijk, waardoor de determinant $\Delta(\mathbf{p}-\mathbf{q},\mathbf{a},\mathbf{b})$ nul is.

(b) De determinant $\Delta(\mathbf{p}-\mathbf{q},\mathbf{a},\mathbf{b})$ wordt ook nul als $\mathbf{a}=\mathbf{b}$ en $\mathbf{p}-\mathbf{q}\neq\mathbf{0}$. In dit geval zijn l, m twee parallelle lijnen die elkaar niet snijden.